**Prof. Dr. Alfred Toth**

## Verschachtelte 2- und 3-dimensionale semiotische n-Kategorien

1. Herkömmlicherweise (vgl. z.B. Toth 1997, S. 21 ff.) wird jedem im Sinne einer dynamischen Semiose aufgefassten Subzeichen der kleinen semiotischen Matrix ein semiotischer Morphismus wie folgt zugeordnet:

$$\begin{array}{c|ccc} & .1 & .2 & .3 \\ \hline 1. & 1.1. & 1.2 & 1.3 \\ 2. & 2.1 & 2.2 & 2.3 \\ 3. & 3.1 & 3.2 & 3.3 \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\end{array}}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} & & & \\ \hline & id1 & \alpha & \beta\alpha \\ & \alpha° & id2 & \beta \\ & \alpha°\beta° & \beta° & id3 \end{array}$$

Mit dieser Methode wird aber die Doppelnatur eines Subzeichens als statisches Subzeichen einerseits und als dynamische Semiose anderseits durcheinandergebracht. Um dies zu zeigen, ordnen wir der Zeichenklasse

(3.1 2.1 1.3)

zunächst Morphismen nach der obigen Methode zu, indem einfach jedes Subzeichen durch den ihm korrespondieren Morphismus ersetzt wird

($\alpha°\beta°$, $\alpha°$, $\beta\alpha$).

Nun hatte aber schon Bense (1979, S. 53, 67) festgehalten, dass das triadische Zeichen eine verschachtelte Relation aus einer triadischen, einer dyadischen und einer monadischen Relation sei. Wir benötigen demnach verschachtelte Kategorien, die diesem relationalen Umstand Rechnung tragen. Deshalb waren bereits in Toth (2008, S. 159 ff.) sogenannte dynamische Morphismen eingeführt worden, um sie von ihrer statischen Verwendung im letzten Beispiel zu unterscheiden. Bei dynamischen Morphismus wird der Verschachtelung von Relationen wie folgt Rechnung getragen:

(3.1 2.1 1.3) $\Rightarrow$ ((3.2), (1.1), (2.1), (1.3)) $\equiv$ [[$\beta°$, id1], [$\alpha°$, $\beta\alpha$]].

Hier handelt es sich also um 2-dimensionale n-Kategorien im Sinne von Baez und Dolan (1998), denn die statischen Subzeichen selbst können natürlich wiederum in Morphismen umgeschrieben werden

((3.1) $\rightarrow$ (2.1) $\rightarrow$ (1.3)) $\Rightarrow$ (( 3$\rightarrow$ 2) $\rightarrow$ (1 $\rightarrow$ 1) $\rightarrow$ (2 $\rightarrow$ 1) $\rightarrow$ (1 $\rightarrow$ 3)) $\equiv$ [[$\beta°$, id1], [$\alpha°$, $\beta\alpha$]].

2. Etwas komplexer ist die Sachlage bei 3-dimensionalen n-Kategorien. Zunächst ist es bei einer 3-Zkl wie etwa

(3.3.1 1.2.1 2.1.3)

völlig unmöglich, den 3-dimensionalen Subzeichen statische Morphismen zuzuweisen, die ja Abbildungen zweier monadischer Primzeichen sind. Daraus folgt also, dass die aus dem 3-dimensionalen Zeichenkubus von Stiebing (1978) herauslesbaren Zeichenklassen nur mit Hilfe von dynamischen Morphismen erfassbar sind. Allerdings gibt es hier mindestens zwei Möglichkeiten.

2.1. Bei der ersten Möglichkeit werden alternierend von links nach rechts Paare von monadischen Primzeichen aus den (von links nach rechts) in Dyaden abgeteilten Triaden einem der Morphismen aus der obigen kategorietheoretischen Matrix zugewiesen. Auf unser Beispiel angewandt, sähe das so aus:

$(3.3.1\ 1.2.1\ 2.1.3) \Rightarrow ((3.1), (3.2), (1.1)), (1.2), (2.1), (2.3)) \equiv [[\alpha°\beta°, \beta°, \mathrm{id}1], [\alpha, \alpha°, \beta]]$.

Das Ergebnis ist also wie bei 2-Zkln pro Zeichenklasse eine natürliche Transformation, nur dass es bei 3-Zkln eben drei Morphismen pro geordnetem Paar sind und nicht zwei, wie bei 2-Zkln. Trotzdem wird diese Methode dem Sachverhalt, dass hier drei triadische Subzeichen zu einer komplexen triadischen Relation über Relationen verschachtelt sind, nicht gerecht.

2.2. Wir führen daher folgende Methode ein:

$$\begin{aligned}(3.3.1\ 1.2.1\ 2.1.3) \Rightarrow\ & (((3.\underline{1}), (3.\underline{2}), (3.\underline{1}); (3.\underline{2}), (3.\underline{1}), (3.\underline{3})), ((3.\underline{1}), (3.\underline{2}), (3.\underline{1}), (3.\underline{2}, 3.\underline{1}, 3.\underline{3})); \\ & ((1.1), (1.2), (1.1); (1.2), (1.1), (1.3))) \equiv \\ & [[\alpha°\beta°, \beta°, \alpha°\beta°], [\beta°, \alpha°\beta°, \mathrm{id}3], [\alpha°\beta°, \beta°, \alpha°\beta°], [\beta°, \alpha°\beta°, \mathrm{id}3], \\ & [\mathrm{id}1, \alpha, \mathrm{id}1], [\alpha, \mathrm{id}1, \beta\alpha]],\end{aligned}$$

wobei dies nach dem oben Gesagten eine abkürzende Schreibweise für die n-Kategorie

$((3 \rightarrow 3 \rightarrow 1), (1 \rightarrow 2 \rightarrow 1), (2 \rightarrow 1 \rightarrow 3)) \rightarrow (((3 \rightarrow \underline{1}), (3 \rightarrow \underline{2}), (3 \rightarrow \underline{1}); (3 \rightarrow \underline{2}), (3 \rightarrow \underline{1}), (3 \rightarrow \underline{3})), ((3 \rightarrow \underline{1}), (3 \rightarrow \underline{2}), (3 \rightarrow \underline{1}), (3 \rightarrow \underline{2}, 3 \rightarrow \underline{1}, 3 \rightarrow \underline{3})); ((1 \rightarrow 1), (1 \rightarrow 2), (1 \rightarrow 1); (1 \rightarrow 2), (1 \rightarrow 1), (1 \rightarrow 3)))$

ist. Allgemein wird also eine 3-Zkl

(a.3.b c.2.d e.1.f) wie folgt in eine n-Kategorie aufgelöst:

$(a.3.b\ c.2.d\ e.1.f) \rightarrow ((a \rightarrow c, (a \rightarrow 2), (a \rightarrow d), (a \rightarrow e), (a \rightarrow 1), (a \rightarrow f); (3 \rightarrow c), (3 \rightarrow 2), (3 \rightarrow d), (a \rightarrow e), (a \rightarrow 1), (a \rightarrow f); (b \rightarrow c), (b \rightarrow 2), (b \rightarrow d), (b \rightarrow e), (b \rightarrow 1), (b \rightarrow f))$.

**Bibliographie**


Baez, John C./Dolan, James, Categorification. In: (Getzler, Ezra/Kapranov, Mikhail (Hrsg.), Higher Category Theory. Providence, RI 1998, S. 1-36

Bense, Max, Die Unwahrscheinlichkeit des Ästhetischen. Baden-Baden 1979

Stiebing, Hans Michael, Zusammenfassungs- und Klassifikationsschemata von Wissenschaften und Theorien auf semiotischer und fundamentalkategorialer Basis. Diss. Stuttgart 1978
Toth, Alfred, Entwurf einer Semiotisch-Relationalen Grammatik. Tübingen 1997
Toth, Alfred, Semiotische Strukturen und Prozesse. Klagenfurt 2008